Colle du 4 novembre : Séries numériques et suites et séries de fonctions

Exercice 0 : Tous les exercices de la semaine précédente.

5.1 Questions de cours

Question de cours 1 : Théorème de dérivation des séries de fonctions.

Question de cours 2 : Critère spécial pour les séries alternées, majoration du reste.

Question de cours 3 : Théorème d'intégration d'une série de fonctions.

5.2 Séries numériques

Exercice 1 : Donner une équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sqrt{k}$.

5.3 Suites et séries de fonctions

Exercice 1 : Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(nx)}$. Donner le domaine de définition de f, déterminer si f est de classe C^1 sur son intervalle de définition, et donner des équivalents de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.

Exercice 2 : Soit (a_n) une suite de $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante divergente vers $+\infty$. Pour $t \geq 0$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{a_n}$. A-t-on nécesairement $\int_0^1 f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a_n}$?

Exercice 3 : La fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 4 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout entier naturel k on a $\int_a^b f(t) t^k dt = 0$. La fonction f est-elle nécessairement identiquement nulle ?

Exercice 5 : 1. Soit $f : x \to 2x(1-x)$. Montrer que la suite (f^n) (où $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$) converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$ vers la constante égale à $1/2$.
2. Soit I un intervalle compact contenu dans $]0,1[$. Montrer que toute fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 6 : Soit $k > 0$. Soit une suite (f_n) de fonctions k-lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 7 : Soit $r \geq 0$. Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynômes qui converge simplement vers une fonction f sur $[a,b]$. Montrer que f est une fonction polynôme.

Exercice 8 : On note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln x}$.
1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0.
4. Montrer que $x^k f(x) \to 0$ pour tout k quand $x \to +\infty$.

Exercice 9 : Soient E et F deux espaces vectoriels normés complets. Soit $f : E \to F$. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tous x, y dans E :

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq a.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n : E \to F, x \mapsto \frac{f(2^n x)}{2^n}$. Étudier la convergence de la suite $(g_n)_n$.
2. Montrer que g est continue linéaire et que $f - g$ est bornée.
3. Montrer que g est l'unique application linéaire continue à distance finie de f.

Exercice 10 : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit $(a_n)_n$ une suite de A sans valeur d'adhérence.
1. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{4^{-n}+|x-a_n|}$ est définie et continue sur A.
2. Que pensez-vous de l'affirmation : une partie A de $\mathbb{R}$ est compacte si, et seulement si, toute fonction continue de A dans $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 11 : Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} nxe^{-nx^2}$.

Exercice 12 : Donner des équivalents de $f(x) = \sum \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$ et $g(x) = \sum \frac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}$ quand $x \to 0$.